DETERMINANTI

ZA

POČETNIKE I SAMOUKE

NAPISAO

ADOLF KONDRAT

GIMN. DIREKTOR u m.

CIJENA DIN 20·—

ZAGREB 1930.

TISAK JUGOSLOVENSKE ŠTAMPE D. D. U ZAGREBU.

DETERMINANTI

ZA

POČETNIKE I SAMOUKE

NAPISAO

ADOLF KONDRAT

GIMN. DIREKTOR u m.



ZAGREB 1930.

TISAK JUGOSLOVENSKE ŠTAMPE D. D. U ZAGREBU.

PREDGOVOR

I ako taj spis sadržava ono što se nalazi u svakom djelu o determinantima, ipak držim, da ne će biti nikom, tko želi upoznati teoriju determinanata, na odmet, nego će mu biti samo od koristi. Pojam determinanata i osnovni poučci o njima bivaju u sistematskim djelima tako razvijani, da zahtijevaju od čitaoca znatni napor, jer sistem djela traži, da počinje s teoremima u svoj svojoj potpunosti, a razvijanje je njihovo zbito i kratko. To je doduše u znanstvenom pogledu opravdano, no u didaktičnom pogledu za uvođenje u ovu teoriju, nezgodno. Stoga sam ovdje upotrijebio u glavnom historički razvoj pokazavši, kako su rješenja sistema linearnih jednadžbi s 2 i 3 nepoznanice sastavljena po određenim pravilima, koja dovode do pojma determinanata 2. i 3. stupnja. Zatim prelazim na determinante 4. i 5. stupnja i na determinant uopće. Držao sam se u glavnom principa indukcije, koji je za početak i kod obuke u matematici, najprirodniji. Poradi toga će ovaj spis naročito dobro doći studentima matematike i tehnike.

Ovdje je razvito iz teorije determinanata toliko, koliko je bezuvjetno potrebito znati onome, tko hoće da se bavi oko studija matematike, a naročito oko analitičke geometrije. Algoritam (način računanja) determinantski potreban je i onome, tko se služi rezultatima primijenjene matematike, jer su mnoge formule izražene u determinantskom obliku, a zgodne su za pamćenje i u dosta slučajeva dovode brzo do numeričkoga rezultata. Sylvester naziva teoriju deter-

minanata algebrom algebre, jer daje uopće rezultate algebarskih operacija, kao što algebra daje opće rezultate aritmetičkih operacija (Vidi: E. Lucas: Théorie des nombres).

Tko prođe ovaj spis, moći će preći na sistematska djela, koja mu tada ne će zadavati znatnih poteškoća. Od starijih djela rade o teoriji determinanta Baltzerovo (njem.), Salmonovo (engl. i prev. njem.), Güntherovo (njem.), Mansionovo (franc. i njem. prev.), Studničkino (češki) i dr., a od novijih Pascalovo (franc., njem. pr.), Gavrilovićevo (ćir. u Beogradu) i dr.

Upotrebljavajući taj algoritam u početku, gdjegod se nada prilika na pr. kod rješavanja linearnih jednadžbi, steći će čitalac potrebnu rutinu.

Predpostavljam znanje iz matematike, što se traži u srednjoj školi.

U Varaždinu koncem rujna 1929.

PISAC.

I.

Determinanti drugoga stupnja

1. Do determinanata dovelo je promatranje rješenja sustava linearnih jednadžbi, pa ćemo i mi udariti tim putem. Počet ćemo sa sustavom dviju jednadžbi s dvije nepoznanice.

Ako riješimo dvije linearne jednadžbe:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

poznatim načinom, dobit ćemo vrijednosti korena

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Tu vidimo da su nazivnici korena jednaki. Nazivnik se sastoji, od razlike dviju produkata koeficijenata nepoznanica; dolaze ista slova *a, b,* a indeksi su permutacije (bez ponavljanja) brojeva 1, 2 to j. 1, 2 i 2, 1. Pojedine faktore a_1, b_1, a_2, b_2 zvat ćemo *elementima,* a produkte od ovih elemenata *kompleksijama.* Kompleksiju od dva elementa, u kojoj je veći indeks pred manjim, zvat ćemo: *inversijom.* Vidimo, da u nazivniku inversija $a_2 b_1$ ima negativni predznak.

I u produktu od više faktora zovemo *inversijom* skup od ma koja dva faktora, gdje je veći indeks pred manjim, ako su slova alfabetskim ili drugim unaprijed određenim redom poređana. U produktu na pr. $a_3 b_4 c_5 d_1 e_2$ jesu inversije: $a_3 d_1$, $a_3 e_2$, $b_4 d_1$, $b_4 e_2$, $c_5 d_1$, $c_5 e_2$; dakle ih ima 6.

Izraz u nazivniku naći ćemo s pomoću sheme $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, koja se sastoji od dva retka: u prvom su koeficijenti nepoznanica prve jednadžbe a_1, b_1, u drugom druge a_2, b_2; ili od dva stupca: u prvom su koeficijenti od x t. j. a_1, a_2, u drugom od y t. j. b_1, b_2. Treba tada množiti elemente sheme u diagonali jedan s drugim tako, da počnemo od prvog elementa prvoga retka s lijeva na desno, a onda one u drugoj diagonali. Drugi produkt treba odbiti od prvoga. No možemo reći to pravilo i ovako: Načinimo produkte diagonalnih elemenata počinjući s elementima prvoga stupca, a inversiju uzmimo negativno.

Na taj način dobiveni izraz zovemo *determinantom,* a bilježimo ga gornjom shemom ili prvim diagonalnim članom u zagradama: $(a_1 b_2)$. Taj se drugi način obilježavanja može samo onda upotrijebiti, ako su elementi redaka i stupaca označavani po određenomu propisu kao u našem slučaju.

Izračunana je vrijednost toga determinanta $a_1 b_2 - a_2 b_1$. (1)

Budući da ima dva retka ili dva stupca, zovemo ga *determinantom drugoga stupnja.* On ima dakle 4 elementa, dva sa slovom *a* i s indeksima 1, 2 i dva sa slovom *b* i s indeksima 1, 2.

2. Ako zamijenimo u shemi gornjega determinanta retke tako, da drugi postane prvi, dakle, da dobijemo shemu $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$, onda je prema jednakom pravilu računanja vrijednost toga novoga determinanta: $a_2 b_1 - a_1 b_2$, a to je negativna vrijednost izraza (1), dakle možemo pisati:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Isto vrijedi, ako zamijenimo stupce, jer

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ako zamijenimo retke (stupce) u determinantu 2. stupnja, vrijednost mu je jednaka negativnoj vrijednosti prvog determinanta.

3. U brojniku korena *x* (vidi t. 1.) dolazi determinant sheme $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, jer mu je vrijednost $c_1 b_2 - c_2 b_1$, a u brojniku korena *y* determinant $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$. Prema tome vidimo, da ćemo dobiti brojnike za *x* resp. za *y*, ako mjesto koeficijenata od *x* resp. od *y* stavimo u shemi poznate članove prenesene na desnu stranu jednadžbe.

Rješenja jednadžbi u odsj. 1. možemo prema tome pisati u obliku:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

4. Determinant 2. stupnja ne mijenja svoje vrijednosti, ako elemente prvoga retka napišemo u shemi u prvom stupcu istim redom počevši odozgo dolje, a elemente drugoga retka u drugom stupcu, jer

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Iz toga se vidi, da i retke možemo staviti kao stupce, jer se vrijednost determinanta ne mijenja.

Dakle je rezultat jednadžbi t. 1. isti, stavili mi koeficijente u isti mah kao elemente redaka ili stupaca.

Primjer. Koreni su jednadžbi

$$3x + 4y = 2$$
$$5x - 2y = 12$$

u determinantnom obliku:

$$x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 12 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \frac{2.(-2) - 4.12}{3.(-2) - 4.5} =$$

$$= \frac{-4 - 48}{-6 - 20} = 2$$

$$y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \frac{3.12 - 5.2}{3(-2) - 4.5} =$$

$$= \frac{36 - 10}{-6 - 20} = -1.-$$

Zadaci za vježbu. 1. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$!

Rješenja: a) 5, b) 0, c) 5, d) 22.

2. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 3 \\ \frac{1}{5} & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{4}{5} \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 0{\cdot}8 & \frac{1}{4} \\ 0{\cdot}6 & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$!

Rješenja: a) $-\frac{1}{10}$, b) $-\frac{1}{10}$, c) 0.01, d) $-\frac{49}{120}$.

II.

Determinanti trećega stupnja

1. Riješivši jednadžbe

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

po x, y, z dobivamo:

$$x = \frac{d_1 b_2 c_3 - d_1 c_2 b_3 - d_2 b_1 c_3 + d_2 b_3 c_1 + d_3 b_1 c_2 - d_3 c_1 b_2}{a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 c_1 b_2}$$

$$y = \frac{a_1 d_2 c_3 - a_1 d_3 c_2 - a_2 d_1 c_3 + a_2 d_3 c_1 + a_3 d_1 c_2 - a_3 d_2 c_1}{N}$$

$$z = \frac{a_1 b_2 d_3 - a_1 b_3 d_2 - a_2 b_1 d_3 + a_2 b_3 d_1 + a_3 b_1 d_2 - a_3 b_2 d_1}{N}$$

gdje N ima istu vrijednost kao nazivnik korena x.

Riješivši gornje jednadžbe na pr. po *z* jednim od poznatih običnih načina, dobit ćemo neposredno:

$$z = (a_2 a_3 b_1 d_1 - a_1 a_2 b_1 d_3 - a_1 a_3 b_2 d_1 + a_1^2 b_2 d_3$$
$$- a_2 a_3 b_1 d_1 + a_1 a_3 b_1 d_2 + a_1 a_2 b_3 d_1 - a_1^2 b_3 d_2) :$$
$$(a_2 a_3 b_1 c_1 - a_1 a_2 b_1 c_3 - a_1 a_3 b_2 c_1 + a_1^2 b_2 c_3 -$$
$$- a_2 a_3 b_1 c_1 + a_1 a_3 b_1 c_2 + a_1 a_2 b_3 c_1 - a_1^2 b_3 c_2).$$

U dividendu i divizoru uništi se 1. s 5. članom, a zatim se skrati dividend i divizor s a_1, pa izlazi gornji izraz.

2. Nazivnik korena x, y, z sastoji se od 6 produkata, koje produkte zovemo kompleksijama, od slova a b c, kojima pridružujemo permutacije* znamenaka 1, 2, 3, t. j. pojedine su kompleksije: $a_1 b_2 c_3$, $a_1 b_3 c_2$, $a_2 b_1 c_3$, $a_2 b_3 c_1$, $a_3 b_1 c_2$, $a_3 b_2 c_1$. Prvi član svake permutacije pridružimo slovu *a*, drugi slovu *b*, a treći slovu *c*.

Za predznak pojedine od onih 6 kompleksija izilazi ovo pravilo: *Ako je broj sviju inversija u kompleksiji neparan, onda stavljamo pred nju znak minus, inače znak plus.*

Ako promotrimo naime nazivnik od *x*, vidjet ćemo, da pozitivni članovi imaju paran broj inversija, a negativni neparan. Tako je u prvom članu broj inversija jednak nuli, u četvrtom su dvije inversije: $a_2 c_1$ i $b_3 c_1$, u petom opet dvije inversije; dok je u drugom članu samo jedna inversija: $b_3 c_2$, u trećemu samo jedna $a_2 b_1$ i u šestomu su tri: $a_3 b_2$, $a_3 c_1$ i $b_2 c_1$.

* Gdje se ništa drugo ne dodaje, svagdje se misle permutacije bez ponavljanja.

U brojniku za x (vidi t. 1. iz početka) moramo slova poređati ovako $d\,b\,c$ i opet primijeniti prednji postupak t. j. pridružiti permutacije znamenaka 1, 2, 3; a predznaci pojedinih kompleksija određuju se opet po gornjem pravilu. U brojniku za y je poređaj slova $a\,d\,c$, u brojniku za z $a\,b\,d$. Taj se dakle poredaj ne smije za isti koren mijenjati. Dobivamo te poređaje u brojnicima tako, da u produktu $a\,b\,c$ stavimo d na mjesto slova, koje je u koeficijentima one nepoznanice, kojoj vrijednost tražimo; dakle koeficijenti od x imadu slovo a, pa mjesto a stavimo u $a\,b\,c$ slovo d; od y koeficijenti imadu slovo b, pa u $a\,b\,c$ stavimo mjesto b slovo d; napokon za z stavimo mjesto c u $a\,b\,c$ slovo d.

Izraze, koji dolaze u brojnicima i nazivnicima korena x, y, z, koje možemo dobiti, kako netom razložismo, zovemo *determinantima trećega stupnja* i obilježavamo ih shemama:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{(nazivnik)}, \quad \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{(brojnik od x)},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{(brojnik od y)}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \text{(brojnik od z)}.$$

Kraće ih možemo obilježiti analogno prema onome, što je rečeno o determinantima drugoga stupnja, poređajem, kako dolazi u diagonali, stavivši ga u zagrade, dakle: $(a_1\,b_2\,c_3)$, $(d_1\,b_2\,c_3)$, $(a_1\,d_2\,c_3)$, $(a_1\,b_2\,d_3)$.

Determinant 3. stupnja ima 9 elemenata i to u prvom slučaju: a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3; a tako i u ostalima.

3. Vrijednost determinanta $(a_1\,b_2\,c_3)$ dobivamo dakle tako, da produktima $a\,b\,c$ pridružimo redom permutacije znamenki, koje ćemo zvati *indeksima*, 1, 2, 3; a predznake pojedinih tako dobivenih kompleksija određujemo prema pravilu u t. 2.

Ako u izrazu

$$a_1\,b_2\,c_3 - a_1\,b_3\,c_2 - a_2\,b_1\,c_3 + a_2\,b_3\,c_1 + a_3\,b_1\,c_2 - a_3\,b_2\,c_1 \quad (1)$$

koji je vrijednost determinanta $(a_1\,b_2\,c_3)$, izlučimo sad faktore a_1, a_2, a_3, ne mijenjajući red kompleksija, dobit ćemo:

$$a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - a_2\,(b_1\,c_3 - b_3\,c_1) + a_3\,(b_1\,c_2 - c_1\,b_2).$$

Vidimo, da su ovdje elementi prvoga stupca u shemi toga determinanta (2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ pomnoženi s binomima, kojih su članovi produkti od po dva faktora, koji su opet elementi drugoga i trećega stupca sheme. Binom uz faktor a_1 je zapravo determinant drugoga stupnja sheme $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, drugi binom uz a_2: $-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, i treći binom uz a_3: $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Ako u (1) izlučimo kao zajedničke faktore b_1, b_2, b_3 i stavimo na prvo mjesto produkt s b_1, na drugo produkt s b_2 i na treće onaj s b_3, dobit ćemo:

$$(3) \quad -b_1\,(a_2\,c_3 - c_2\,a_3) + b_2\,(a_1\,c_3 - a_3\,c_1) - b_3\,(a_1\,c_2 - a_2\,c_1).$$

Napokon izlučivši c_1, c_2, c_3 možemo vrijednost det. (2) pisati u obliku:

$$(4) \quad c_1\,(a_2\,b_3 - b_2\,a_3) - c_2\,(a_1\,b_3 - b_1\,a_3) + c_3\,(a_1\,b_2 - b_1\,a_2).$$

U prednjem su obliku elementi drugoga stupca (2) b_1, b_2, b_3 pomnoženi s determinantima

$$-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

U posljednjem su obliku elementi trećega stupca c_1, c_2, c_3 pomnoženi s determinantima

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Shemu determinanta 2. stupnja, kojim treba pomnožiti a_1 u gornjemu izrazu dobit ćemo, ako u shemi determinanta $(a_1 b_2 c_3)$ precrtamo prvi redak i prvi stupac, u kojemu se nalazi a_1:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Shemu determinanta, kojim je pomnožen a_2, dobit ćemo analogno precrtavši 2. redak i 1. stupac, u kojima se nalazi a_2. Analogno dobivamo i determinant, kojim je pomnoženo a_3, precrtavši 3. redak i 1. stupac.

Što se tiče predznaka determinanata 2. stupnja, kojima su pomnoženi a_1, a_2, a_3, prvi je pozitivan, drugi negativan, a treći opet pozitivan. a_1 leži u 1. retku i u 1. stupcu, zbroj je tih rednih brojeva $1 + 1 = 2$; a_2 leži u 2. retku i 1. stupcu pa je zbroj tih rednih brojeva $2 + 1 = 3$; a_3 leži u 3. retku i 1. stupcu, pa je zbroj rednih brojeva $3 + 1 = 4$. Iz toga vidimo, da predznak — ima determinant, kojim je množen element, koji leži u retku i stupcu, kojima je zbroj rednih brojeva neparan.

U (3) ćemo sheme determinanata 2. stupnja, kojima su pomnoženi elementi b_1, b_2, b_3 dobiti istim postupkom, kako je prije naveden, a negativni su oni, koji su pomnoženi s elementima, koji su u retku i stupcu, kojih redni brojevi imadu kao zbroj neparni broj. Tako je determinant pomnožen s b_1 negativan a kako se b_1 nalazi u prvom retku i 2. stupcu, zbroj je $1 + 2 = 3$ neparan; za b_2 je onaj zbroj 4, paran; a za b_3 opet 5, neparan.

Do jednakoga zaključka dolazimo i za izraz (4).

Ovi se determinanti drugoga stupnja zovu *subdeterminanti,** koji pripadaju onim elementima determinata 3. stupnja, kojima su pomnoženi.

* Zovu ih i: minori.

Subdeterminanti, koji pripadaju elementima prvog stupca a_h, $h = 1, 2, 3$ označuju se obično s A_h $h = 1, 2, 3$; koji pripadaju elementima b_h, $h = 1, 2, 3$ sa B_h i oni, koji pripadaju elementima c_h, $h = 1, 2, 3$ sa C_h.

Ako je vrijednost determinanta (1) odnosno (2) napisana u obliku izraza iza (1) ili u obliku (3) ili (4), kažemo, da smo determinant (1) *rastavili po elementima prvoga, odnosno drugoga ili trećega stupca.*

Rastavljeni determinant (1) možemo kraće pisati ovako: $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$ ili $b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3$ ili $c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3$.

Oredit ćemo sheme tih subdeterminanata tako, *da precrtamo onaj redak i onaj stupac, u kojemu se nalazi onaj element, kojemu pripada, a predznak je njihov pozitivan ili negativan prema tome, da li je zbroj rednog broja retka (brojeći odozgo dolje) i rednog broja stupca (brojeći od lijeva na desno), u kojemu se nalazi odnosni elemenat, paran ili neparan.*

4. No vrijednost determinanta $(a_1 b_2 c_3)$ ili (2) možemo pisati i u ovom obliku [vidi (1)]:

$$a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - b_2 a_3),$$

a to je determinant rastavljen po elementima 1. retka sheme (2); ili

$$-a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + b_2 (a_1 c_3 - a_3 c_1) - c_2 (a_1 b_3 - a_3 b_1),$$

rastavljen po elementima drugoga retka; ili

$$a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - b_3 (a_1 c_2 - a_2 c_1) + c_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

rastavljen po elementima trećega retka.

I za ove slučajeve vrijedi pravilo u t. 3.

Možemo dakle determinant 3. stupnja rastaviti po elementima ma kojega retka ili ma kojega stupca.

Najbrže ćemo izračunati vrijednost determinanta 3. stupnja dane sheme, da ga rastavimo po elementima 1. retka ili stupca.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\,[6 - (-2)] - 4\,[15 - 6] + (-1)\,[5 - (-6)] = 1 \,.\, 8 - 4 \,.\, 9 - 11 = -39.$$

Ako bismo htjeli primijeniti izraz (1), koji se dobije, da produktu $a\,b\,c$ pridružimo redom sve permutacije od 1 2 3, a predznak pojedine kompleksije odredimo prema broju inversija, onda bismo morali staviti $a_1 = 1$, $b_1 = 5$, $c_1 = -3$; $a_2 = 4$, $b_2 = 2$, $c_2 = 1$; $a_3 = -1$, $b_3 = -2$, $c_3 = 3$ i uvrstiti u formulu (1).

Nazivnik je vrijednosti nepoznanice determinant 3. stup. sastavljen od koeficijenata nepoznanica, koje su sve prenesene na lijevu stranu jednadžbi; brojnik je det. 3. stupnja, koji se dobije iz sheme det. za nazivnik tako, da koeficijente one nepoznanice, koju tražimo, zamijenimo poznatim članovima jednadžbi prenesenim na desnu stranu.

Primjer. Koren x jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 5z &= 3 \\ 5x + 2y - z &= 18 \\ x + y - 4z &= 1 \end{aligned}$$ jest:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 18 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-225}{-75} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 18 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-150}{-75} = 2;$$ analogno $z = 1$.

Zadaci za vježbu.

Zadatak 1. Izračunaj ove determinante:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

*Zadatak 2.** Za koji slučaj nemaju konačnih rješidbi jednadžbe:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 3z &= a \\ 5x + 2y + z &= b \\ ax + by &= -1 \,? \end{aligned}$$

Naputak. Kad je nazivnik u rezultatu korena = 0.

*Zadatak 3.*** Dokaži da je

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg} A & 1 & 1 \\ 1 & \operatorname{tg} B & 1 \\ 1 & 1 & \operatorname{tg} C \end{vmatrix} = 2, \text{ ako je } A + B + C = 180^\circ.$$

Uzmi u obzir, da je

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C.$$

Zadatak. 4. Za koju vrijednost od x jest

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & x & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Rastavi det. po članovima 2. stupca i onda riješi po x! Napravi pokus!

Zadatak 5. Za koje pozitivne i cjelobrojne vrijednosti od x i y jest

$$\begin{vmatrix} 2 & x & y \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vidi zad. 4.

Rješenja: 1.a) 9, b) 39, c) 0. 2. Za $a = 3b$. 4. $x = \frac{8}{5}$. 5. $x = 2u$, $y = -1 + 5u$, $u = 0, 1, 2 \ldots$, ima tih vrijednosti dakle ∞ mnogo.

* Mathesis (franc. matem. časopis, izlazi u Bruselju) 1902. pg. 263. ** Math. 1902. pg. 262.

III.

Determinanti četvrtoga stupnja

1. Ako produktu $a\,b\,c\,d$ pridružimo redom sve permutacije znamenki 1, 2, 3, 4, i to prvi element, permutacije svakiput slovu a, drugi slovu b, treći slovu c i četvrti slovu d i pred svaku kompleksiju s neparnim brojem inversija stavimo minus, a pred onu s parnim brojem inversija plus, dobit ćemo izraz

$$
\begin{aligned}
& a_1 b_2 c_3 d_4 - a_1 b_2 c_4 d_3 - a_1 b_3 c_2 d_4 + a_1 b_3 c_4 d_2 + a_1 b_4 c_2 d_3 \\
& - a_1 b_4 c_3 d_2 - a_2 b_1 c_3 d_4 + a_2 b_1 c_4 d_3 + a_2 b_3 c_1 d_4 \\
(1)\ & - a_2 b_3 c_4 d_1 - a_2 b_4 c_1 d_3 + a_2 b_4 c_3 d_1 + a_3 b_1 c_2 d_4 \\
& - a_3 b_1 c_4 d_2 + a_3 b_2 c_1 d_4 - a_3 b_2 c_4 d_1 + a_3 b_4 c_1 d_2 \\
& - a_3 b_4 c_2 d_1 - a_4 b_1 c_2 d_4 + a_4 b_1 c_3 d_2 + a_4 b_2 c_1 d_3 \\
& + a_4 b_2 c_3 d_1 - a_4 b_3 c_1 d_2 + a_4 b_3 c_2 d_1
\end{aligned}
$$

Taj izraz zovemo vrijednošću determinanta četvrtoga stupnja ili kraće *determinant 4. stupnja*.

Ako načinimo analogno kao kod determinanta 3. stupnja shemu

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

u kojoj se nalaze svi elementi, koji dolaze u kompleksijama prednjega izraza, vidjet ćemo ovo: U svakoj kompleksiji (1) dolazi iz svakog retka kao i iz svakog stupca samo po jedan element. Poređaj $a\,b\,c\,d$ pokazuje, da je svaki stupac zastupljen s po jednim elementom, a ma koja pemutacija od 1, 2, 3, 4 pokazuje, da je svaki redak zastupljen samo s po jednim elementom. Tako na pr. u komplesiji $a_3\,b_2\,c_1\,d_4$, prvi je stupac i treći redak zastupljen s a_3, drugi stupac i drugi redak s b_2, treći stupac i prvi redak s c_1 i četvrti stupac i četvrti redak s d_4.

Determinant je 4. stupnja sastavljen od 16 elemenata $= 4^2$ elem., kako se vidi iz sheme.

2. Ako sad u prvih 6 čl. izraza (1) izlučimo zajednički faktor a_1, bit će u zagradama izraz, koji se sastoji od kompleksija s po tri elementa. Broj se inversija nije ni u jednoj kompleksiji tim promijenio, jer a_1, budući da je na prvom mjestu, ne čini inversije ni s jednim elementom, pa je broj inversija u svakoj kompleksiji isti kao kad načinimo sve kompleksije od 3 elementa b, c, d s pridruženim permutacijama znamenki 2, 3, 4, jer je znamenka *1* pridružena za sve ove kompleksije slovu a. Dakle izraz u zagradama mora biti determinant 3. stupnja sa shemom

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Ako u drugih 6 čl. izlučimo — a_2, ostat će u zagradama izraz, koji se sastoji od kompleksija, koje nastanu, ako produktu $b\,c\,d$ pridružimo permutacije indeksa 1, 3, 4. Kompleksije u (1), koje se počinju s a_2 možemo uzeti, da su nastale tako, da svakoj od spomenutih kompleksija s po tri elementa dodasmo sprijeda a_2, no tim se broj inversija povećao u svakoj novoj kompleksiji za 1, naime za inversiju 21, a s tim je svaka nova kompleksija dobila protivni predznak onome što ga je imala kompleksija s 3 el., od koje je postala. Ako sad izlučimo — a_2, preostat će u zagradama kompleksije s 3 el. sa predznacima, koji im po odsj. 2. u II. pogl. pripadaju. U zagradama će biti dakle vrijednost determinanta sheme:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Ako u trećih 6 čl. (1) izlučimo a_3 kao zajednički faktor, preostat će u zagradama izraz, koji se sastoji od kompleksija, koje nastanu, ako produktu $b\,c\,d$ pridružimo permutacije indeksa 1, 2, 4. Kao prije, možemo uzeti, da su kompleksije, koje se počinju s a_3, nastale tako, da svakoj kompleksiji $b_h\,c_k\,d_l$

gdje je *hkl* ma koja permutacija od 1, 2, 4, dodasmo sprijeda a_3, a tim se broj inversija u svakoj novoj kompleksiji povećao za *2*, naime za inversije 31, 32; ali tim se nije promijenio predznak svake nove kompleksije, koja se dobila od po jedne kompleksije s tri elementa, jer je paran broj inversija uvećan za 2 opet paran, kao što i neparan ostaje neparan. Dakle ako izlučimo a_3, preostat će u zagradama predznaci, koji onim kompleksijama pripadaju. Stoga je izraz u zagradama prema II. 2. vrijednost determinanta sheme

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Ako napokon u četvrtih *6* čl. izlučimo — a_4, ostat će u zagradama kompleksije, koje dobivamo, ako produktu *b c d* pridružimo permutacije indeksa 1, 2, 3. I ovdje možemo uzeti, da su kompleksije, koje se počinju s a_4, nastale tako, da smo svakoj kompleksiji od tri elementa, kako dolaze u izrađenom determinantu trećega stepena, dodali element a_4. Tim se u svakoj novoj kompleksiji, koja se počinje s a_4 povećao broj inversija za 3, pa je svaka nova kompleksija dobila protivni predznak onome, što ga je imala kompleksija sa 3 elementa, od koje je postala. Stoga će, ako izlučimo $-a_4$ kao zajednički faktor, ostati u zagradama kompleksije s po 3 elementa s predznacima, koji im pripadaju, a to je vrijednost determinanta sheme

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Vrijednost determinanta (1) možemo pisati i u obliku $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4$. Faktori su A_h, $h = 1, 2, 3, 4$, kako vidjesmo, determinanti 3. stupnja, a zovemo ih analogno takim faktorima kod determinanta 3. stupnja (vidi II. 3.) *subdeterminantima* elemenata prvoga stupca determinanta sheme

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Ove ćemo subdeterminante naći po istomu pravilu, kako ih nalazimo za elemente 1. stupca determinanta 3. stupnja t. j. precrtat ćemo onaj redak i stupac, u kojemu se nalazi element, kojemu tražimo subdeterminant, onda će preostati elementi, koji čine shemu subdeterminanta. Ako je zbroj rednih brojeva odnosnog retka (odozgo dolje) i stupca (od lijeva na desno) neparan, trebat će taj subdeterminant uzeti negativno.

Element a_4 na pr. leži u 4. retku i 1. stupcu, pa treba precrtavši 4. redak i 1. stupac dobiveni determinant uzeti negativno, što potvrđuje razvidba (1).

3. Determinant 4. stupnja (1) možemo još i u drugom obliku napisati. Izlučit ćemo kao u t. 2. zajednički faktor a_1 iz sviju kompleksija, koje ga sadržavaju. U zagradama je izraz, kako gore vidjesmo, koji je vrijednost determinanta 3. stupnja $(b_2 c_3 d_4)$ — označena diagonalnim članom.

Ako izlučimo iz sviju kompleksija (1), koje sadržaju b_1: — b_1, ostat će u zagrama kompleksije, koje dobivamo, ako produktu *a c d* pridružimo sve permutacije indeksa *2, 3, 4*. Kompleksije, koje imadu na drugom mjestu b_1 i imadu 4 elementa, možemo pomisliti, da su nastale tako, da smo u svakoj kompleksiji $a_h\ c_k\ d_l$, gdje je hkl ma koja permutacija od 2, 3, 4, iza a_h stavili b_1. Predznak svake nove kompleksije bit će protivan onome, što ga ima kompleksija $a_h\ c_k\ d_l$, jer prvi je indeks svagda veći od 1, pa je tim broj inversija narasao za 1, i stoga se predznak mijenja, jer je od neparna broja inversija nastao paran, a od parna neparan. Ako dakle izlučimo $-b_1$ kao zajednički faktor, u zagradama će preostati

kompleksije $a_h\, c_k\, d_l$ s predznacima, koji odgovaraju broju inversija svake pojedine t. j. u zagradama će biti determinant sheme

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Ako iz sviju kompleksija u (1), koje sadržavaju c_1, izlučimo c_1 kao zajednički faktor, preostat će u zagradama izraz, koji se sastoji od kompleksija, koje dobivamo, ako produktu $a\,b\,d$ pridružimo sve permutacije indeksa 2, 3, 4. Predznak će svake pojedine kompleksije u zagradama odgovarati broju inversija kao u II. t. 3. Možemo to na jednaki način pokazati, kako smo to pokazali kod izlučivanja faktora a_1, $-b_1$. U zagradama će biti determinant 3. stupnja sheme

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Ako napokon izlučimo $-d_1$ iz sviju kompleksija (1), koje imadu d_1 kao zajednički faktor, preostat će u zagradama determinant 3. stupnja sheme

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Možemo dakle pisati vrijednost determinanta 4. stupnja u obliku:

$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + d_1 D_1.$$

A_1, B_1, C_1 D_1 su subdeterminanti elemenata prvoga retka, a sheme su im gore navedene, samo treba vrijednost faktora uz b_1 i d_1 uzeti negativno. Za određenje elemenata i predznak pojedinih subdeterminanata vrijedi opet pravilo u odsj. 2. Kad napišemo determinant u ovom obliku, kažemo, da smo ga rastavili po elementima prvoga retka.

Primjer. Vrijednost determinanta

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

mogli bismo dobiti, ako u izrazu navedenom u III. 1. stavimo $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$; $b_1 = 3$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$, $b_4 = 1$; $c_1 = 5$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, $c_4 = 0$; $d_1 = 4$, $d_2 = 1$, $d_3 = 3$, $d_4 = 1$. Onda je vrijednost 1. kompleksije $a_1\, b_2\, c_3\, d_4 = 0$, dalje: $-a_1\, b_2\, c_4\, d_3 = 0$, $-a_1\, b_3\, c_2\, d_4 = 1$ i t. d.

No ovaj je način dosta nezgodan. Zgodnije je rastaviti determinant po elementima 1. retka ili stupca. Ako ga rastavimo po elementima 1. stupca, bit će njegova vrijednost u obliku:

$$1\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Sad treba izračunati pojedine subdeterminante 3. stupnja, koje možemo opet rastavbom po elementima 1. retka (ili stupca) izraziti.

Tako na pr.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (2-0) - 1\,(1-3) + 1\,(0-2) =$$

$0 + 2 - 2 = 0$ i t. d.

Izračunavši i ostale subdeterminante i pomnoživši ih s faktorima, koji su pred njima, dobit ćemo vrijednost zadanoga determinanta. Vrijednost mu je:

$$0 - 16 + 4 - 12 = -24. -$$

Zadatak za vježbu. Izračunaj vrijednost determinanta

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 6 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}. \quad \text{Rješ. } 9\tfrac{1}{6}.$$

IV.

Determinanti petoga i višega stupnja

1. Ako produktu *a b c d e* pridružimo sve permutacije znamenki 1, 2, 3, 4, 5 i stavimo pred svaku kompleksiju s parnim brojem inversija pozitivni predznak, a pred kompleksiju s neparnim brojem inversija negativni predznak, dobivamo vrijednost determinanta 5. stupnja sa shemom

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

Evo napisanih nekoliko početnih kompleksija razvijenoga determinanta:

(1) $a_1b_2c_3d_4e_5 - a_1b_2c_3d_5e_4 - a_1b_2c_4d_3e_5 + a_1b_2c_4d_5e_3 + \ldots$

Iz tvorbe ovih kompleksija vidi se, da u svakoj dolazi samo po jedan element iz svakoga retka i svakog stupca. Po slovima *a b c d e* vidimo da je zastupljen svaki stupac s po jednim elementom, a iz svake permutacije znamenki 1, 2, 3, 4, 5, da je i svaki redak zastupljen samo s po jednim elementom. Determinant 5. stupnja sadržaje svega $5 \times 5 = 25$ elemenata.

2. I ovaj se determinant može pisati u obliku

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 + a_5 A_5 \quad \text{ili}$$
$$a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 + d_1 D_1 + e_1 E_1.$$

Ovdje su $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_1, C_1, D_1, E_1$ determinanti 4. stupnja, a možemo ih dobiti i odrediti predznak po analognom pravilu kao što je navedeno u III. 2.

Ako u (1) izlučimo a_1 kao zajednički faktor sviju kompleksija, koje imadu kao prvi faktor a_1, onda će u zagradama biti izraz, koji dobijemo, ako produktu *b c d e* pridružimo sve permutacije znamenki, indeksa 2, 3, 4, 5. Broj inversija se u svakoj komplek-

siji u zagradama nije promijenio, jer a_1 nije pravio ni s jednim faktorom inversije, budući da je bio na prvom mjestu, pa će tu biti samo inversije, koje pripadaju kompleksijama $b_h c_k d_l e_m$. gdje je h k l m ma koja permutacija od 2, 3, 4, 5. Prema III. 1. taj je izraz vrijednost determinanta 4. stupnja, sheme

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

Ako iz sviju kompleksija, koje sadržavaju a_2, izlučimo $-a_2$ kao zajednički faktor, bit će u zagradama izraz, koji se sastoji od kompleksija, koje dobijemo, ako produktu *b c d e* pridružimo redom sve permutacije indeksa 1, 3, 4, 5. Možemo pomisliti nastale one kompleksije, koje se počinju s a_2 tako, da smo kompleksijama $b_h c_k d_l e_m$ gdje *h k l m* primi vrijednost svake permutacije 1, 3, 4, 5, dodali sprijeda a_2. Ako sad izlučimo a_2, manji će biti u svakoj preostaloj kompleksiji broj inversija za *1* prema broju u kompleksiji, koja ima ista 4 elementa $b_h c_k d_l e_m$ i počinje se s petim a_2. Ako bismo a_2 izlučili, imala bi svaka preostala kompleksija $b_h c_k d_l e_m$ predznak, koji joj ne odgovara, jer se broj inversija smanjio, u njoj nema inversije *21,* stoga bi se znak morao svakoj inversiji u zagradama promijeniti, a to ćemo postići da izlučimo $-a_2$. Dakle imal i bismo:

$$-a_2 b_1 c_3 d_4 e_5 + a_2 b_1 c_3 d_5 e_4 + a_2 b_1 c_4 d_3 e_5$$
$$-a_2 b_1 c_4 d_5 e_3 - a_2 b_1 c_5 d_3 e_4 + a_2 b_1 c_5 d_4 e_3 + \ldots$$
$$= -a_2 (b_1 c_3 d_4 e_5 - b_1 c_3 d_5 e_4 - b_1 c_4 d_3 e_5 -$$
$$+ b_1 c_4 d_5 e_3 + b_1 c_5 d_3 e_4 - b_1 c_5 d_4 e_3 - \ldots)$$

Izraz u zagradama množen s $-a_2$ je dakle determinant sheme

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

Ako izlučimo iz sviju kompleksija u (1), koje sadržaju a_3, kao zajednički faktor a_3, preostat će u zagradama izraz, koji se sastoji od kompleksija, koje dobivamo, ako produktu $b\,c\,d\,e$ pridružimo sve permutacije indeksa 1, 2, 4, 5. U svakoj kompleksiji, koja se počinje s a_3, toliko je inversija, koliko i u dijelu $b_h\,c_k\,d_l\,e_m$ dodavši još k tome dvije, i to 31, 32. Budući da dodavši neparnom broju parni broj, bude opet neparni broj, a dodavši parnomu parni, parni bude opet parni, to je predznak kompleksije, koja se počinje s a_3 zavisan samo o broju inversija u $b_h\,c_k\,d_l\,e_m$, pa ako izlučimo a_3 preostat će u zagrama kompleksije $b_h\,c_k\,d_l\,e_m$ s predznacima, koji im pripadaju prema broju inversija. Stoga je taj izraz u zagradama prema III. 1. determinant sheme

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

Ako izlučimo u (1) iz kompleksija koje ga sadržavaju, $-a_4$, bit će u zagradama opet determinant 4. stepena sheme

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}.$$

Ponajprije je jasno, da će u zagradama preostati izraz, koji se sastoji od kompleksija, koje dobivamo pridruživši produkte $b\,c\,d\,e$ sve permutacije indeksa 1235. Što se tiče predznaka pojedine kompleksije u zagradama, treba uočiti, da je u svakoj kompleksiji, koja se počinje s a_4, broj inversija jednak, broju inversija sadržanih u dijelu $b_h\,c_k\,d_l\,e_m$ gdje je $h\,k\,l\,m$ ma koja permutacija indeksa 1, 2, 3, 5, uvećanu za 3, jer pridolaze inversije 41, 42, 43. Stoga će svaka kompleksija, što nastane, ako a_4 dodamo sprijeda svakoj kompleksiji $b_h\,c_k\,d_l\,e_m$ imati protivni predznak, no što ga ima drugi dio $b_h\,c_k\,d_l\,e_m$. Dakle ako izlučimo $-a_4$, kao zajednički faktor, u zagradama će preostati kompleksije $b_h\,c_k\,d_l\,e_m$ s predznacima, koji im pripadaju po broju inversija t. j. u zagradama će biti gore navedeni determinant.

Kao prije kod kompleksija, što se počinju s a_3, možemo pokazati, da izlučivši iz kompleksija, koje sadržavaju a_5, taj element kao zajednički faktor, preostaje u zagradama determinant sheme

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \end{vmatrix}.$$

Dakle determinant se 5. stupnja dade rastaviti po elementima prvoga stupca. Subdeterminanti su determinanti 4. stupnja: shemu njihovu dobivamo po istom pravilu kao kod determinanata 3. i 4. stupnja, a predznaci njihovi opet zavise o zbroju rednih brojeva retka i stupca, u kojem se nalazi element a_h $h = 1, 2, 3, 4, 5$.

Analognim postupkom kao kod determinanta 4. stupnja možemo pokazati, da se determinant 5. stupnja dade rastaviti po elementima prvoga retka.

3. Vrijednost determinanta n toga stupnja dobivamo, ako produktu $a\,b\,c \ldots m\,n$ (n slova) pridružimo redom sve permutacije indeksa 1, 2, 3 ..., $(n-1)$, n (n prvih brojeva prirodnoga niza), a u algebrajskom zbroju tih produkata odredimo predznak svakoj kompleksiji prema broju inversija u njoj t. j. ako je broj inversija paran, predznak joj je plus, inače minus. Taj determinant ima $n \times n = n^2$ elemenata, i to: $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$; $b_1, b_2, b_3 \ldots b_{n-1}, b_n$; $\ldots n_1, n_2, \ldots n_{n-1}, n_n$, a shema mu ima oblik

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & b_n & \cdots & n_n \end{vmatrix}. \quad (2)$$

S obzirom na ovu shemu, možemo izreći definiciju i tako: *Determinant je algebarski zbroj produkata tako napravljenih od n^2 zadanih elemenata, da je svaki redak i svaki stupac zastupljen samo s po jednim elementom, a predznak svakoga produkta je plus ili minus prema tome, da li je broj sviju inversija u njemu paran ili neparan.*

Kako smo pokazali za determinant 4. i 5. stupnja, da se dadu rastaviti po elementima prvoga retka ili stupca, možemo to pokazati za svaki determinant ma kojega višega stupnja. Svagda će, ako izlučimo iz kompleksija nekog determinanta po jedan element prvoga retka ili stupca, koji one sadržavaju, u zagradama preostati kompleksije, koje se sastoje od određenih slova, kojima su pridružene sve permutacije određenih brojeva, a broj elemenata u tim kompleksijama manji je za jedan od broja elemenata u zadanim kompleksijama: dakle u zagradama bit će vrijednost determinanta stupnja za jedan manjega, no što je zadani determinant. Sheme i predznaci ovih subdeterminanata određuju se kao kod determinanta 5. stupnja.

Poslije ćemo dokazati, da se determinant dade rastaviti po elementima ma kojega retka ili stupca.

Zadatak za vježbu. Izračunaj vrijednost determinanta 5. stupnja:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Naputak: Rastavi ovaj determinant po elementima 1. stupca ili retka; determinante 4. stupca, koje dobiješ možeš opet izraziti rastavljanjem s pomoću determinanata 3. stupnja, a ove konačno s pomoću det. 2. stupnja.

Rješenje: 232.*

* Ovaj se primjer kao i onaj na str. 21. dade primjenom poučaka u pogl. VI. kraće i brže izraditi.

V.

Dalji poučci o determinantima.

1. Ako u shemi (2) IV. 3. stavimo retke na mjesto stupaca odnosno stupce namjesto redaka istim redom, dobit ćemo determinant sheme:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdot & \cdot & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdot & \cdot & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n_1 & n_2 & n_3 & \cdot & \cdot & n_n \end{vmatrix}.$$

Dokazat ćemo, da je vrijednost ovoga determinanta jednaka vrijednosti determinanta (2) u pogl. IV. 3.

Ako stavimo stupce namjesto redaka u determinantu 3. stupnja

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ dobit ćemo: } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ako ovaj drugi determinant rastavimo po elementima 1. retka, dobit ćemo identički jednaku vrijednost kao za prvi determinant, naime:

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix},$$ vidi i formulu u II. 3.

Ako to vrijedi za determinant 3. stupnja, vrijedit će i za determinant 4. stupnja.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

jer ako prvi determinant rastavimo po elementima 1. retka, a drugi po elementima 1. stupca, bit će sub-

determinanti u prvom det. jednaki subdeterminantima u drugom determinantu. Tako je od a_1 subdeterminant u prvom determinantu

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix},$$

a subdeterminant od a_1 u drugom determinantu je

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

U ovima su subdeterminantima stupci prvoga jednaki recima drugoga pa su prema gornjemu jednaki. Isto vrijedi i za ostale subdeterminante det. 4. stupnja.

Ako to vrijedi za determinant 4. stupnja, vrijedit će i za determinant 5. stupnja i t. d.

Može se zaključiti, da su ona dva determinanta na početku jednaka i iz toga, što imadu diagonalni član, a prema tome i početni član jednak, jer ostale kompleksije dobivamo jednako pridružujući produktu a b c . . . . n sve permutacije brojeva 1, 2, . . . , n.

2. Ako u shemi (2) IV 3. zamijenimo dva susjedna retka ili dva susjedna stupca, vrijednost je novoga determinanta *protivnog predznaka* prema vrijednosti zadanoga determinanta. Za determinant je 2. stupnja to direktno dokazano u I. 2.

Ako u (2) IV. 3. zamijenimo na pr. 2. i 3. stupac, dobivamo shemu

$$(1)\quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 & d_1 & \cdots & n_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 & d_2 & \cdots & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ a_n & c_n & b_n & d_n & \cdots & n_n \end{vmatrix}.$$

Sve kompleksije ovoga determinanta dobit ćemo od kompleksija u (2) $a_h b_k c_l \dots n_z$ gdje je h k l . . . z ma koja permutacija indeksa 1, 2, 3, ... n—1, n, da zamijenimo faktore b_k i c_l. Kompleksija tako dobivena $a_h c_l b_k \dots n_z$ ima broj inversija za 1 veći ili manji,

pa stoga moramo pred nju staviti znak —. Učinivši tu zamjenu u svakoj kompleksiji od (1), dobit ćemo sve kompleksije novoga determinanta, a svakoj se ujedno mijenja i predznak. Dakle je vrijednost novoga determinanta protivnog znaka od (2).

Tako na pr. u determinantu 4. stupnja $(a_1 c_2 b_3 d_4)$ kompleksija $a_3 c_2 b_4 d_1$ izlazi iz $-a_3 b_4 c_2 d_1$ zamjenom elemenata b_4 i c_2, no tim se broj inversija smanji za 1, pa dolazi pred novu kompleksiju +.

Ako u determinantu (1) odsj. 2. zamijenimo 1. sa 2. stupcem, dobit ćemo determinant sheme:

$$(2)\quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 & d_1 & \cdots & n_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & d_2 & \cdots & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_n & a_n & b_n & d_n & \cdots & n_n \end{vmatrix}.$$

U vrijednosti det. (2) prema gornjemu opet svaka kompleksija mijenja predznak prema kompleksijama od (1) t. j. sve kompleksije imadu isti predznak kao kompleksije u (2) IV. 3. Stoga je vrijednost od (2) ista kao od (2) IV. 3. Poređaj je faktora sad u svakoj kompleksiji doduše različit, no budući da su predznakovi jednaki, bit će vrijednost determinanta jednaka, jer $\pm\ {}_h a_k b_l d_m \dots n_z = \pm\ a_k b_l c_h d_m \dots n_z$

Jednako bismo mogli pokazati, da to vrijedi i za zamjenu dviju redaka.

Gornji oblik (2) možemo pomisliti i tako dobiven, da je u deter. $(a\ b\ c \dots n_n)$ stupac sa *c* maknut preko dva stupca s *a* i *b*. U tom je dakle slučaju vrijednost od (2) jednaka determ. $(a\ b\ c \dots n_n)$. Ako uopće neki stupac bude pomaknut preko parnoga broja (2 k) stupaca na jednu ili drugu stranu, onda se promijenio predznak 2 *k* puta t. j. novi je predznak $(-1)^k$.

Ako stupac bude promaknut preko neparnoga broja (2 k — 1) stupaca, onda se predznak mijenja (2 k — 1) puta t. j. novi će predznak biti $(-1)^{2k-1}$ Kad naime pređe neki stupac onaj stupac, koji je tik njega, predznak je novoga determinanta minus,

ako naime znamo vrijednost zadana determinanta; kad pređe i drugi stupac plus, jer $-(-1) = (-1)^2$; kad pređe i treći stupac minus, jer $-[-(-1)] = (-1)^3$ i t. d.

Iz toga slijedi ovaj važni poučak:

Ako neki stupac (redak) pomaknemo tako, da pređe neparan broj stupaca (redaka), vrijednost je novoga determinanta protivnoga predznaka prema vrijednosti zadanoga determinanta; dok, ako pređe paran broj stupaca (redaka), predznak je isti kao u zadanog determinanta. Apsolutna se vrijednost tako nastalih determinanata ne mijenja. Pomicati se može stupac (redak) na jednu ili drugu stranu: desno (dolje) ili lijevo (gore).

Ako napravimo od sheme determinanta $(a, b, c, \ldots n_n)$ shemu, gdje su stupci (retci) različito poređani, treba istražiti, koliko je stupaca (redaka) prešao onaj, koji je najviše na desno (najniže); zatim koliko onaj pred ovim i t. d., pa ako je zbroj brojeva promjena neparan broj, onda će vrijednost toga determinanta biti prema zadanom determinantu negativna, dok apsolutna vrijednost ostaje ista.

Primjeri. 1. Ako u determinantu

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 11 \text{ zamijenimo 2. i 3. redak,}$$

dobivamo determinat

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -11. \text{ O tome se možemo uvjeriti,}$$

ako ovaj determinant razvijemo.

Ako u ovom determinantu izmijenimo 1. s 2. retkom, dobit ćemo

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 11 \text{ jer je 3. redak zapravo}$$

pomaknut preko dva retka gore.

Ako u (3) zamijenimo 2. i 3. stupac, dobivamo

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -11.$$

2. Determinant 4. stupnja

$$(4) \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2\,(-21) = -42.$$

Ako naime rastavimo taj determinant po elementima prvoga retka, umnošci s 2. i 3. i 4. elementom daju nulu.

Kad bismo ga rastavili po elementima prvoga stupca, subdeterminant je svakog elementa osim prvoga jednak nuli, pa opet izađe ista vrijednost.

3. Ako u gornjem determinantu (4) zamijenimo 2. i 4. redak, dobivamo determinant sheme:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ovdje je zadnji redak od (4) prešao 2. i 3. redak, a 3. redak prešao je drugi redak, dakle jer je $2+1=3$, vrijednost će biti protivna vrijednosti od (4) t. j. $+42$. Opet je za vježbu dobro razviti taj determinant.

4. Ako u determinantu na kraju III. 3. poređamo stupce, da mu shema ima oblik

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix},$$

vrijednost je ovom determinantu $+24$, jer je zadnji stupac pomaknut preko dva stupca, a 2. je stupac prešao jedan stupac, dakle $2+1=3$; pa dobivamo $-(-24) = 24$.

5. Determinant $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

ima vrijednost $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$. Treba uzeti u obzir, da je subdeterminant od x_2: $-(y_1-y_3)$.

Ovaj determinant izražava površinu trokuta, kojemu su zadane koordinate vrhova. Ako je taj determinant jednak nuli, t. j. ako je površina toga trokuta jednaka nuli, leže ove tri točke u pravcu. Dakle uvjet, da tri točke leže u istom pravcu, izražen je gornjim determinantom jednakim nuli.

3. S pomoću poučka u t. 1. možemo pokazati, da se determinant može rastaviti po elementima ma kojega stupca (retka) i kako se može rastaviti.

Da dođemo do pravila, kako možemo determinant *n*- toga stupnja

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & k_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & k_2 & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & \cdots & k_{n-1} & n_{n-1} \\ a_n & b_n & c_n & & k_n & n_n \end{vmatrix}$$

rastaviti po *k*- tom stupcu (retku), pomaknut ćemo *k*- ti stupac (redak) na prvo mjesto. Tim je taj stupac (redak) pomaknut preko $\overline{k-1}$ stupaca (redaka). Ako je $\overline{k-1}$ paran broj, onda novi determinant ima istu vrijednost kao zadani determinant (5); ako je $\overline{k-1}$ neparan broj, onda mu je vrijednost protivnoga predznaka.

Ako je $k-1$ parno, odnosno stupac (redak) od lijeva na desno na neparnu mjestu, postupit ćemo rastavljajući kao kad rastavljamo determinant po elementima prvoga stupca (retka), a u drugom slučaju treba uzeti svaki subdeterminant s protivnim znakom ili vrijednost novoga determinanta pomnožiti s (-1).

No nije ni potrebno pomicati stupac (redak), nego je dosta, da rastavimo po *k*- tom stupcu (retku) po pravilu u III. 2. ako je *k* neparan broj; ako je *k* paran broj, treba sve subdeterminante uzeti s protivnim znakom.

No možemo namah dobiti ispravnu vrijednost determinanta rastavljena ma po kojem stupcu (retku) po ovome pravilu, koje uključuje u sebi gornji postupak:

Ako rastavljamo determinant po elementima ma kojega stupca (retka), pripadne subdeterminante dobit ćemo, ako precrtamo stupac (redak) i redak (stupac), u kojemu je element, kojim množimo taj subdeterminant. Predznak je subdeterminanta pozitivan ili negativan prema tome, da li je zbroj rednih brojeva stupca (retka) i retka (stupca), u kojemu se odnosni element nalazi, paran ili neparan.

Možemo reći i tako, da je predznak subdeterminanta $(-1)^{r+s}$ gdje je *s* redni broj stupca, a *r* redni broj retka, u kojemu se nalazi element, kojemu subdeterminant pripada.

Gornje će pravilo biti jasno iz ovoga: Ako u *k* tom stupcu, *k* neka je neparan broj uzmemo element k_m, gdje neka je *m* paran broj, dobit će pripadni subdeterminant predznak negativni, jer ako pomaknemo taj stupac na prvo mjesto, ne mijenja se tim vrijednost determinanta prema danome, pa će, ako postupimo po pravilu za prvi stupac (IV. 2.), subdeterminant biti opet negativan, jer $m+1$ (m. ti redak i 1. stupac) je neparan broj kao i $k+m$.

Ako je *k* paran broj i *m* paran broj bit će pripadni subdeterminant elementu k_m pozitivan, jer ako taj stupac pomaknemo mora vrijednost subdeterminanta biti protivna onoj, koju bismo dobili postupivši po pravilu za prvi stupac. Budući da je sada $m-1$ neparan broj, bio bi subdeterminant negativan, no jer pomaknut *k*- ti stupac preko $\overline{k-1}$, dakle neparnog broja stupaca, moramo svaki subdeterminant uzeti s protivnim predznakom t. j. taj će subdeterminant biti

pozitivan, kako i po gornjem pravilu slijedi, jer $m+k$ je parno. Prema tome može se pokazati i za ostale slučajeve, da gornje pravilo vrijedi.

Ako bismo na pr. determinant n-toga stupnja rastavili po elementima 4. stupca, onda je D_1 negativno, jer $4+1=5$; D_2 pozitivno, jer $4+2=6$ i t. d. Vrijednost je dakle toga determinanta jednaka $d_1 D_1 + d_2 D_2 + d_3 D_3 + \dots d_n D_n$, gdje su $D_1, D_3 \dots D_{2k-1}$ dakle svaki neparni subdeterminant negativni, a $D_2, D_4 \dots D_{2k}$, dakle svaki parni, pozitivni. Vrijednost je od D_2 na pr.

$$+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & e_1 & \cdots & n_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & e_3 & \cdots & n_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & e_4 & \cdots & n_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & e_n & \cdots & n_n \end{vmatrix}$$

Primjeri. 1. Determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

rastavljen po elementima prvoga stupca ima oblik:

$$1.\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 4.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Rastavljen po elementima 3. retka ima oblik:

$$3.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 4.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Ako izradimo dalje ove subdeterminante u prvom i drugom obliku uvjerit ćemo se, da je vrijednost danoga determinanta u jednom i drugom slučaju 60.

2. Determinant kojemu su elementi ma kojega stupca (retka) jednaki nuli, ima vrijednost jednaku nuli, jer su produkti nule s pripadnim subdeterminantima jednaki $\emptyset$.

3. Ako su svi elementi iznad ili ispod diagonale jednaki nuli, reducira se determinant na produkt diagonalnih elemenata, jer pripadni subdeterminant prvoga elementa ima u 1. retku samo jedan element različan od nule, a tako je i u subdeterminantima nižim.

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 d_4.$$

$$\text{jer } a_1\begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & c_3 & 0 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 b_2 \begin{vmatrix} c_3 & 0 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

4. *Determinant, koji ima u dva stupca (retka) redom po dva elementa, koji su u istom retku (stupcu) jednaka, jednak je nuli.*

Dokazat ćemo taj poučak najprije za determinant, kojemu su redom po dva elementa jednaka u 1. i 2. stupcu.

Za determinant 2. stupnja je to umah jasno, jer taj determinant mora imati oblik:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_2 a_1 = \emptyset.$$

Ako determinant 3. stupnja

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$ rastavimo po elementima 1. retka, dobit ćemo:

$$a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Prvi se član uništava s drugim, a 3. je jednak nuli po prednjemu.

Budući da to vrijedi za determinant 3. stupnja, mora vrijediti i za determinant 4. stupnja, jer opet dobivamo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

$$+ b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \\ a_4 & a_4 & c_4 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \\ a_4 & a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0$$

Budući da to vrijedi za determinant 4. stupnja, vidjeli bismo na isti način, da to vrijedi za determinant 5. stupnja i t. d.; uopće, ako to vrijedi za determinant n toga stupnja vrijediti će za determinant $\overline{n+1}$.ga stupnja.

Jednako se to dokazuje za retke, samo treba onda determinant rastaviti po elementima 1. stupca.

Ako su taka dva stupca (retka) na raznim mjestima, možemo premjestiti jedan od tih stupaca (redaka) na prvo mjesto, a drugi na drugo, pa smo tim to sveli na gornje. Dakle je tim na početku izrečeni poučak dokazan.

Primjedba. Ako su u determinantu, koji ima u prvom i drugom stupcu (retku) svaka dva elementa, koji su u istom retku (stupcu), jednaka, onda je vrijednost determinanta, koji nastane izmjenom 1. i 2. stupca (retka) jednaka $-\triangle$, ako je vrijednost danog determinanta $\triangle$. No kako se nije tim shema determinanta promijenila, mora biti $\triangle = -\triangle$, a to je moguće samo, ako je $\triangle = 0$. Tako se obično i dokazuje gornji poučak, no naš je način očevidniji.

5. U determinantu n- toga stupnja neka je subdeterminant, koji pripada elementu k- toga stupca; k_h, $h = 1, 2 \dots n$ označen sa K_h, $h = 1, 2 \dots n$.

Ako pomnožimo sad te subdeterminante s elementima kojega drugoga stupca na pr. trećega, dobit ćemo izraz

$$\sum_{h=1}^{n} c_h K_h = c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3 + \dots c_n K_n,$$

koji mora biti jednak, kako ćemo dokazati, nuli.

Gornji je izraz zapravo vrijednost determinanta sheme:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & i_1 & c_1 & l_1 & \cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & i_2 & c_2 & l_2 & \cdots & n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_n & b_n & c_n & \cdots & i_n & c_n & l_n & \cdots & n_n \end{vmatrix}.$$

Ovu shemu ćemo dobiti, ako u danom determinantu stavimo na mjesto elemenata k toga stupca k_h elemente c_h, $h = 1, 2, 3 \dots n$. Vidimo naime, da su subdeterminanti elemenata k- toga stupca gdje je k_h zamijenjeno sa c_h, u ovom determinantu zbilja K_h kao i u danom determinantu, no vrijednost je ovoga determinanta jednaka nuli po pravilu odsj. 3.

Isto se tako može pokazati, da to vrijedi, ako množimo elemente nekoga retka sa subdeterminantima drugoga kojega retka.

Dakle vrijedi poučak:

Ako pomnožimo elemente ma kojega stupca (retka) sa subdeterminantima kojega drugoga stupca (retka), tako da subdeterminant prvoga elementa nekoga stupca (retka) pomnožimo s prvim elementom nekoga drugoga stupca (retka), subdeterminant drugoga elementa s drugim elementom istoga drugoga nekoga stupca (retka), i tako redom, bit će zbroj tako dobivenih umnožaka jednak nuli.

Primjer. U determinantu

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

kojega je vrijednost 40, jesu subdeterminanti elemenata prvoga stupca $A_1 = -1$, $A_2 = 14$, $A_3 = -9$.

Pomnožimo li ih s elementima 2. stupca: A_1 s 1. el. i t. d., dobit ćemo $-1 + 28 - 27 = 0$; ako ih pomnožimo s elementima 3. stupca, dobit ćemo $-5 + 14 - 9 = 0$.

Zadatak za vježbu.

Izračunaj vrijednost determinanta:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2c^2 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2$.

VI.

Zbroj determinanata.
Umnožak determinanta i nekog broja.

1. Ako više determinanata istoga stupnja ima elemente samo jednoga stupca (retka) na jednakom mjestu (dakle 1. ili 2. ili k-tom) različite, a ostali stupci (retci) su jednaki, možemo algebarski zbroj tih determinanata izraziti kao jedan determinant, u kojemu je različit samo stupac (redak) na onom mjestu, na kojemu su različiti stupci (retci) u pojedinim determinantima, a ostali su jednaki kao u zadanim determinantima. Onaj je različiti stupac (redak) sastavljen od elemenata, koji su algebrajski zbrojevi elemenata različitih stupaca (redaka).

Dakle algebrajski zbroj determinanta, koji imadu k-ti stupac različit:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & k_1 & \cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & k_2 & \cdots & n_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_n & b_n & \cdots & k_n & \cdots & n_n \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & k'_1 & \cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & k'_2 & \cdots & n_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_n & b_n & \cdots & k'_n & \cdots & n_n \end{vmatrix}$$

$$\pm \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & k''_1 & \cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & k''_2 & \cdots & n_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_n & b_n & \cdots & k''_n & \cdots & n_n \end{vmatrix} \pm \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & (k_1 \pm k'_1 \pm k''_1 \pm \cdots) & \cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & (k_2 \pm k'_2 \pm k''_2 \pm \cdots) & \cdots & n_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_n & b_n & \cdots & (k_n \pm k'_n \pm k''_n \pm \cdots) & \cdots & n_n \end{vmatrix}$$

Da to dokažemo, razvit ćemo sve determinante lijeve strane po elementima k toga stupca, pa tim dobivamo:

$$\left(k_1 K_1 + k_2 K_2 + \cdots k_n K_n\right) \pm \left(k'_1 K_1 + k'_2 K_2 + k'_3 K_3 + \cdots k'_n K_n\right) \pm \left(k''_1 K_1 + k''_2 K_2 + \cdots k''_n K_n\right) \pm \cdots$$

Subdeterminanti su K_h u svakom determinantu jednaki, jer su svi ostali elementi osim onih k-toga stupca jednaki.

Uzevši sad zajedno članove, koji imadu jednake subdeterminante, dobit ćemo:

$$K_1\left(k_1 \pm k'_1 \pm k''_1 \pm \cdots\right) + K_2\left(k_2 \pm k'_2 \pm k''_2 \pm \cdots\right) + \cdots + K_n\left(k_n \pm k'_n \pm k''_n \pm \cdots\right).$$

Sad se razabire, da je to vrijednost determinanta, koji imade na *k* tom mjestu elemente:

$$\left(k_1 \pm k'_1 \pm k''_1 \pm \cdots\right), \left(k_2 \pm k'_2 \pm k''_2 \pm \cdots\right), \ldots\ldots \left(k_n \pm k'_n \pm k''_n \pm \cdots\right).$$

Taj je determinant izražen shemom na desnoj strani gornje jednadžbe.

Primjeri 1.

$$\begin{vmatrix}1&5&1\\2&4&3\\3&2&5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-1&5&1\\4&4&3\\-3&2&5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&5&1\\6&4&3\\0&2&5\end{vmatrix}$$

$$= -6\,(25-2) = -138.$$

2. $$\begin{vmatrix}1&5&1\\2&4&3\\3&2&5\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&3\\3&4&5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&3\\3&1&5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&4&1\\2&4&3\\3&-1&5\end{vmatrix} = 5.$$

2. Ako zbrojimo algebrajski determinante

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\cdots n_1\\a_2&b_2&c_2\cdots n_2\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\a_n&b_n&c_n\cdots n_n\end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix}b_1&b_1&c_1\cdots n_1\\b_2&b_2&c_2\cdots n_2\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\b_n&b_n&c_n\cdots n_n\end{vmatrix}$$

dobivamo prema onome, što smo u odsj. 1. razvili:

$$\begin{vmatrix}a_1\pm b_1&b_1&c_1\cdots n_1\\a_2\pm b_2&b_2&c_2\cdots n_2\\a_3\pm b_3&b_3&c_3\cdots n_3\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\a_n\pm b_n&b_n&c_n\cdots n_n\end{vmatrix} \quad (1)$$

Ovaj je determinant jednak determinantu

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\cdots n_1\\a_2&b_2&c_2\cdots n_2\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\a_n&b_n&c_n\cdots n_n\end{vmatrix},$$ jer je drugi determinant jednak nuli prema V. 4.

Ako determinantu (1) dodamo determinant

$$\pm\begin{vmatrix}c_1&b_1&c_1\cdots n_1\\c_2&b_2&c_2\cdots n_2\\c_3&b_3&c_3\cdots n_3\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\c_n&b_n&c_n\,\cdot\,n_n\end{vmatrix},$$ gdje je prvi stupac jednak trećemu, dobit ćemo prema odsj. 1., jer su elementi samo u prvom stupcu različiti:

$$\begin{vmatrix}a_1\pm b_1\pm c_1&b_1&c_1\cdots n_1\\a_2\pm b_2\pm c_2&b_2&c_2\cdots n_2\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\\a_n\pm b_n\pm c_n&b_n&c_n\cdots n_n\end{vmatrix} \quad (2)$$

I ovaj determinant ima istu vrijednost kao i prednji t. j. $(a_1 b_2 \cdots n_n)$.

Dodavši determinantu (2) determinant

$$\pm\begin{vmatrix}a_1\pm b_1\pm c_1&k_1&c_1\cdots k_1\cdots n_1\\a_2\pm b_2\pm c_2&k_2&c_2\cdots k_2\cdots n_2\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\a_n\pm b_n\pm c_n&k_n&c_n\cdots k_n\cdots n_n\end{vmatrix}$$

u kojem je 2. stupac jednak *k*-tomu, dobit ćemo determinant sheme:

$$\begin{vmatrix}a_1\pm b_1\pm c_1&b_1\pm k_1&c_1\cdots k_1\cdots n_1\\a_2\pm b_2\pm c_2&b_2\pm k_2&c_2\cdots k_2\cdots n_2\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\a_n\pm b_n\pm c_n&b_n\pm k_n&c_n\cdots k_n\cdots n_n\end{vmatrix}$$

Ovaj je determinant opet po gornjemu jednak determinantu $(a_1 b_2 \cdots n_n)$.

Isto tako imamo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \cdots n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \cdots n_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \cdots n_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_n & b_n & c_n \cdots n_n \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \cdots n_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \cdots n_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \cdots n_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_n & b_n & c_n \cdots n_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \cdots\cdots n_1 \\ a_2 \pm a_1 & b_2 \pm b_1 & c_2 \pm c_1 \cdots n_2 \pm n_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \cdots\cdots n_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n & b_n & c_n \cdots\cdots n_n \end{vmatrix}$$

Dakle to vrijedi i za retke.

Tako dolazimo do pravila:

Ako načinimo shemu determinanta, u kojoj su elementi pojedinih stupaca (redaka) jednaki algebarskim zbrojevima elemenata pojedinih stupaca (redaka), i to tako, da prve elemente čine zbrojevi prvih elemenata, druge elemente u novom determinantu zbrojevi drugih elemenata i t. d., pazeći kod tvorbe, novoga determinanta, da ne dodajemo elemente stupaca (redaka) onoga mjesta u danom determinantu, kojima su u novom determinantu već izmijenjeni elementi, tada će vrijednost novoga determinanta biti jednaka vrijednosti danoga determinanta.

Ako označimo promijenjene elemente u determinantu na pr. u 1. 3. i *l*-tom *stupcu sa* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$; $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots \gamma_n$; $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_n$ tako da su $\alpha_h, \gamma_h, \lambda_h$ oblika $a_h \pm b_h \pm \cdots\cdot$ imat će novi determinant shemu:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & d_1 \cdots \lambda_1 \cdots n_1 \\ \alpha_2 & b_2 & \gamma_2 & d_2 \cdots \lambda_2 \cdots n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_n & b_n & \gamma_n & d_n \cdots \lambda_n \cdots n_n \end{vmatrix} . \quad (2)$$

Taj determinant ima prema predašnjemu istu vrijednost kao i determinant dani:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \cdots l_1 \cdots n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \cdots l_2 \cdots n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n & b_n & c_n & d_n \cdots l_n \cdots n_n \end{vmatrix} . \quad (3)$$

Ako na pr. dodamo elementima 4. stupca elemente 1. stupca danog determinanta, dobit ćemo shemu:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & d_1 + a_1 \cdots \lambda_1 \cdots n_1 \\ \alpha_2 & b_2 & \gamma_2 & d_2 + a_2 \cdots \lambda_2 \cdots n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_n & b_n & \gamma_n & d_n + a_n \cdots \lambda_n \cdots n_n \end{vmatrix} . \quad (4)$$

Taj je determinant nastao tako, da smo determinantu (2) dodali determinant sheme:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & \gamma_1 & a_1 \cdots \lambda_1 \cdots n_1 \\ \alpha_2 & b_2 & \gamma_2 & a_2 \cdots \lambda_2 \cdots n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_n & b_n & \gamma_n & a_n \cdots \lambda_n \cdots n_n \end{vmatrix} .$$

Ovaj determinant uopće nije jednak nuli, jer nema dva stupca (retka) jednaka, a morao bi biti jednak nuli, kad bi i (4) bio jednak danom determinantu.

Primjer.

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+4+3 & 4-3 & 3 \\ 1-1+4 & -1-4 & 4 \\ 3+1+2 & 1-2 & 2 \end{vmatrix} = 40.$$

U (5) smo dodali elementima 1. stupca elemente 2. i 3. stupca, od el. 2. stupca odbili smo elemente 3. stupca; vrijednost novoga determinanta jednaka je vrijednosti od (5). — U trećem stupcu drugoga de-

terminanta ne smijemo više dodati elementima ni elemente 1. stupca ni elemente 2. stupca od (5).

Kad bismo na pr. dodali elementima 3. stupca elemente 1. stupca od (5) u novom (drugom) determinantu, dobili bismo

$$\begin{vmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 4 & -5 & 5 \\ 6 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -40,$$ jer drugom determinantu dodani determinant $$\begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -80,$$

a nije jednak nuli.

3. *Množenje determinanta nekim brojem.* Ako u determinantu (3) pomnožimo elemente ma kojega stupca (retka), ali samo jednoga, nekim brojem λ, vrijednost je novoga determinanta jednaka $\lambda\triangle$, gdje je $\triangle$ vrijednost determinanta (3).

Ako determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \cdots (\lambda k_1) \cdots n_1 \\ a_2 & b_2 \cdots (\lambda k_2) \cdots n_2 \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\ a_n & b_n \cdots (\lambda k_n) \cdots n_n \end{vmatrix} \quad (6)$$

u kojemu su elementi k-toga stupca pomnoženi s λ rastavimo po elementima k-tog stupca, imat će svaki član onoga algebarskoga zbroja faktor λ; dakle

$$(6) = \lambda k_1 K_1 + \lambda k_2 K_2 + \cdots \lambda k_n K_n = \lambda\triangle$$

Taj faktor λ možemo prema tome svagda staviti pred determinant, pošto smo elemente onoga stupca, koji su ga sadržavali, razdijelili njime.

Obrnuto: Dani ćemo determinant pomnožiti nekim brojem, ako tim brojem pomnožimo sve elemente ma kojega stupca (retka), ali samo jednoga.

S pomoću ovoga poučka možemo nekom determinantu, u kojemu ima elemenata, koji su razlomljeni brojevi, dati oblik sheme s cjelobrojnim elementima, no onda treba vrijednost ovoga posljednjega determinanta razdijeliti produktom onih brojeva, kojima smo determinant pomnožili.

S pomoću zadnjega i predašnjih poučaka možemo dokazati, da je

$$(7) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n+1 & n+2 & n+3 \\ n+4 & n+5 & n+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 1.$$

Ako pomnožimo elemente 1. retka det. (7) brojem n i podijelimo cijeli determinant s n, vrijednost mu se ne će promijeniti, onda dobivamo:

$$\frac{1}{n}\begin{vmatrix} n & n & n \\ n+1 & n+2 & n+3 \\ n+4 & n+5 & n+7 \end{vmatrix} = (7).$$

Sad možemo od elemenata 2. i 3. retka odbiti elemente 1. retka, pa dobivamo:

$$\frac{1}{n}\begin{vmatrix} n & n & n \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix},$$ a ako opet izlučimo n iz elemenata 1. retka, dobit ćemo: $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Primjeri. 1. Da determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 2 & \frac{3}{5} \end{vmatrix} \quad (8)$$

dobije cjelobrojni oblik, treba pomnožiti sve elemente 1. retka sa 6, 2. retka s 15, 3. s 5; no da ostane vrijednost nepromijenjena treba taj novi determinant razdijeliti sa $6.15.5 = 450$. Mogli bismo i tako dobiti cjelobrojni oblik determinanta, da pomnožimo sve elemente najm. zajedničkim mnogokratnikom brojeva 2, 3, 5, 3, 5 t. j. sa 30, ali onda treba čitavi determinant razdijeliti sa $30^3 = 27000$.

$$(8) = \frac{1}{450}\begin{vmatrix} 3 & 12 & 2 \\ 3 & 10 & 15 \\ 5 & 10 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{27000}\begin{vmatrix} 15 & 60 & 10 \\ 6 & 20 & 30 \\ 30 & 60 & 18 \end{vmatrix} = \frac{196}{225} = \left(\frac{14}{15}\right)^2.$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$3. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ n+1 & n+2 & n+3 & n+4 \\ n+3 & n+5 & n+7 & n+9 \\ n+7 & n+1 & n+3 & n+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 7 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -6 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Zadaci za vježbu.

1. Riješi po x determinant

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 - x & a_3 - x \\ b_1 - x & b_2 - x & b_3 - x \\ c_1 - x & c_2 - x & c_3 - x \end{vmatrix}.$$

Naputak. Svagda možemo determinantu povećati stupanj, da ga zaokružimo tako novim retkom i stupcem, da mu bude vrijednost jednaka zadanom deter. Ovdje možemo pisati:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & a_1 - x & a_2 - x & a_3 - x \\ 0 & b_1 - x & b_2 - x & b_3 - x \\ 0 & c_1 - x & c_2 - x & c_3 - x \end{vmatrix}$$

Ako ga naime rastavimo po elementima prvoga stupca, vidimo, da mu je vrijednost jednaka zadanom determinantu, jer im je shema ista. Sad možemo upotrijebiti poučak VI. 2.

$$\text{Rješenje: } x = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^{*}$$

2. Dokaži, da je

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 + a_3 & a_1 - a_3 & a_2 \\ b_1 + b_3 & b_1 - b_3 & b_2 \\ c_1 + c_3 & c_1 - c_3 & c_2 \end{vmatrix}$$

---

* Mathesis 1922. pg. 427. Th. Muir.

Upotrijebi poučke VI. 2., VI. 3 i V. 2.

3. Dokaži, da je

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & ab+ac+bc & abc \\ 1 & b+c+d & bc+bd+cd & bcd \\ 1 & c+d+e & cd+ce+de & cde \\ 1 & d+e+f & de+df+ef & def \end{vmatrix} =$$

$$(a-d) \cdot (b-e) \cdot (c-f) \cdot (b-d) \cdot (c-e) \cdot (d-c) \cdot$$

Naputak. Odbivši 2. red. od 1., 3. od 2., 4. od 3. dobivamo upotrijebivši VI. 3.:

$$\triangle = (a-d)(b-e)(c-f) \cdot \begin{vmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & c+d & cd \\ 1 & d+e & de \end{vmatrix}$$

Odbivši u ovom determinantu 2. red od 1., 3. r. od 2. i upotrijebivši opet VI. 3. dobivamo traženi izraz.*

4. Dokaži što kraće, da je

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Naputak. Upotrijebi VI. 2.

5. Dokaži, da je

$$\triangle = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2\,abc\,(a+b+c)^3 \;{**}$$

Naputak. Odbivši od 2. i 3. stupca 1. stupac dobivamo:

$$\triangle = (a+b+c)^2 \cdot \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a-(b+c) & a-(b+c) \\ b^2 & (c+a)-b & 0 \\ c^2 & 0 & (a+b)-c \end{vmatrix} \cdot$$

---

* Mathesis 1923. pg. 329. Th. Muir.

** E. Lucas: Théorie des nombres I. pg. 285.

Ako u ovom determinantu opet odbijemo od 1. retka 2. i 3. redak, dobit ćemo:

$$\triangle = (a+b+c)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2bc & -2c & -2b \\ b^2 & c+a-b & 0 \\ c^2 & 0 & a+b-c \end{vmatrix}$$

Ako izradimo zadnji determinant i izlučimo zaj. faktore, dobit ćemo gornju vrijednost.

6. Dokaži, da determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+x & b+x & c+x \\ 1 & a'+y & b'+y & c'+y \\ 1 & a''+z & b''+z & c''+z \end{vmatrix}$$

ima vrijednost, koja je nezavisna o x, y, z.* (Sylvester).

Naputak. Odbij 2. stupac od 3. i 4. stupca.

7. Dokaži, da je

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 \cdots & a_2-b_n \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 \cdots & a_3-b_n \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}^{**} = 0.$$

VII.

Neke primjene determinanata.

1. *Rješavanje sustava linearnih jednadžbi.*

U zadanom je sustavu od n linearnih jednadžbi s n nepoznanica $x_1, x_2 \cdots x_n$:

$$(1) \quad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 + \cdots + a_{n,1}x_n = a_{n+1,1} \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 + \cdots + a_{n,2}x_n = a_{n+1,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + a_{3n}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = a_{n+1,n} \end{array}$$

* E. Lucas ibid. pg. 286., ** ibid. pg. 287.

a_{hk} koeficijent od x_h u k toj jednadžbi ili h je redni broj stupca, a k redni broj retka, u kojemu je koeficijent.

U determinantu, n-tog stupnja kojemu su elementi koeficijenti nepoznanica

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \cdots a_{h1} \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \cdots a_{h2} \cdots a_{n2} \\ \cdot & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{1k} & a_{2k} & a_{3k} \cdots a_{hk} \cdots a_{nk} \\ \cdot & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \cdots a_{hn} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

neka je subdeterminant elementa a_{hk} A_{hk}, a vrijednost njegova $\triangle$.

Pomnožimo lijevu i desnu stranu svake jednadžbe sustava (1) sa subdeterminantima h-toga stupca, i to prvu jednadžbu s A_{h1} drugu sa A_{h} i t. d. pa onda zbrojimo sve lijeve strane i poznate članove na desnoj strani. Ako zatim izlučimo nepoznanice $x_1, x_2 \cdots x_n$ kao zajedničke faktore, dobit ćemo:

$$\begin{array}{l} (a_{11}A_{h1} + a_{12}A_{h2} + a_{13}A_{h3} + \cdots\cdots + a_{1n}A_{hn})x_1 \\ + (a_{21}A_{h1} + a_{22}A_{h2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{2n}A_{hn})x_2 \\ + (a_{h1}A_{h1} + a_{h2}A_{h2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{hn}A_{hn})x_h \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (a_{n1}A_{h1} + a_{n2}A_{h2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{nn}A_{hn})x_n = \\ a_{n+1,1}A_{h1} + a_{n+1,2}A_{h2} + a_{n+1,3}A_{h3} + \cdots + a_{n+1,n}A_{hn}. \end{array}$$

Koeficijenti su sviju nepoznanica u zadnjoj jednadžbi osim koeficijenta nepoznanice x_h jednaki nuli prema V. 5., a koeficijent je od x_h jednak $\triangle$. Izraz je na desnoj strani vrijednost determinanta, koji ima u shemi (2) na mjestu elemenata h-toga stupca poznate članove jednadžbi (1) s predznacima, što ih imadu preneseni na desnu stranu. Ako desni član jednadžbe zadnje označimo s $\triangle^{(h)}$ reducira se jednadžba na $\triangle \cdot x_h = \triangle^{(h)}$ odakle $x_h = \frac{\triangle^{(h)}}{\triangle}$.

Neku ćemo nepoznanicu $x_h, h = 1, 2 \cdots, n$ *u sustavu od* $\boldsymbol{n}$ *jednadžbi s* $\boldsymbol{n}$ *nepoznanica izračunati tako, da pomnožimo sve jednadžbe subdeterminantima elemenata* $a_{h1}, a_{h2} \cdots\cdots a_{hn}$ $(h = 1, 2 \cdots\cdots n)$ *determinanta, koji se sastoji od sviju koeficijenata nepoznanica (shemu ćemo njegovu dobiti izostavivši sve neznanice i znakove + ili — na lijevoj strani jednadžbe); pa ako je* $\triangle^{(h)}$ *vrijednost determinanta, kojega ćemo shemu dobiti, ako u prije spomenutom determinantu elemente* $a_{h1}, a_{h2}, a_{h3}, \cdots\cdots a_{hn}$ *zamijenimo s odnosnim poznatim članovima jednadžbi (s predznacima, što ih imadu na desnoj strani), treba* $\triangle^{(h)}$ *razdijeliti s vrijednošću prije spomenutog determinanta* $\triangle$; *taj je kvocijent vrijednost od* x_h.

Za $n = 3$ dobili smo direktno pravilo u II. 5. Ovo je specijalni slučaj gornjega općega pravila.

Primjer. Riješit ćemo s pomoću determinanata sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ y + 4z &= 14 \\ 2z + u &= 10 \\ 5x - z &= 2. \end{aligned}$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 . \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -58.$$

(nepoznanice u 1. jedn. *z, u;* u 2. jedn. *x, u;* u 3. *x, y;* u 4. *y, u* imadu koeficijente jednake nuli.)

$$\triangle^{(1)} = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 4 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 . \begin{vmatrix} 8 & 3 & 0 \\ 14 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -58.$$

dakle $x = \dfrac{\triangle^{(1)}}{\triangle} = 1$, i t. d. O ispravnosti rješenja možemo se uvjeriti rješivši jednadžbe običnim načinom.

Primjedba. Uopće determinantski način nije zgodan za rješavanje sustava linearnih jednadžbi, pa nema razloga što se taj način navodio (a možda i navodi) kod rješavanja jednadžbi kao posebni način u nekim školskim knjigama. No potrebno ga je poznavati poradi daljih primjena determinanata. Dobro je to s početka upotrebljavati za rješavanje jednadžbi linearnih, da se uvježba izračunavanje determinanata.

2. *Eliminacija nepoznanica.*

Naći ćemo uvjet, kad sustavu od $n + 1$ jednadžbe s *n* nepoznanica

$$(3) \quad \begin{aligned} & a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_1 + \cdots\cdots\cdots + a_{n1} x_n = a_{n+1,\,1} \\ & a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 + \cdots\cdots\cdots + a_{n2} x_n = a_{n+1,\,2} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + a_{3n} x_3 + \cdots\cdots\cdots + a_{n,n} x_n = a_{n+1,\,n} \\ & a_{1,n+1} x_1 + a_{2,n+1} x_2 + a_{3,n+1} x_3 + \cdots + a_{n,n+1} x_n = \\ & a_{n+1,n+1} \end{aligned}$$

zadovoljava *n* vrijednosti nepoznanica.

Najjednostavniji je slučaj, kad imamo dvije jednadžbe s jednom nepoznanicom:

$$\begin{aligned} a_{11} x + a_{12} &= 0 \\ a_{21} x + a_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Ako iz prve jednadžbe nađemo $x = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$, pa ako to uvrstimo u drugu dobit ćemo relaciju $-a_{12} a_{21} + a_{11} a_{22} = 0$, no lijeva strana ove jednadžbe je vrijednost determinanta sheme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Dakle uvjet je, da ista vrijednost od x zadovoljava jednoj i drugoj jednadžbi u isti mah, da bude determinant sastavljen od koeficijenata nepoznanice i poznatih članova anuliranih jednadžbi jednak nuli. — Do istoga bismo rezultata došli izračunavši x iz 2. jednadžbe i uvrstivši je u 1. jedn.

Iz prvih *n* jednadžbi sustava (3) dobit ćemo prema t. 1. vrijednosti nepoznanica $x_1 = \frac{\triangle^{(1)}}{\triangle}$, $x_2 = \frac{\triangle^{(2)}}{\triangle}$, $x_3 = \frac{\triangle^{(3)}}{\triangle} \cdots x_n = \frac{\triangle^{(n)}}{\triangle}$, gdje su $\triangle^{(1)}. \triangle^{(2)}, \triangle^{(3)} .. \triangle^{(n)}$ vrijednosti determinanata, kojih sheme dobivamo, ako u shemi determinanta sastavljena od sviju koeficijenata nepoznanica, (vrijednost mu je $\triangle$) elemente 1. stupca, 2. stupca, ... *n*-toga stupca zamijenimo s poznatim članovima tih *n* jednadžbi, prenesenim na desnu stranu. Ako tih *n* vrijednosti zadovoljava i zadnjoj (n + 1 voj) jednadžbi, mora postojati relacija:

$a_{1,n+1}\,\triangle^{(1)} + a_{2,n+1}\,\triangle^{(2)} + a_{3,n+1}\,\triangle^{(3)} + \cdots\cdots\cdots + a_{n,n+1}\,\triangle^{(n)} = a_{n+1,n+1}\,\triangle$ ili (4) $a_{1,n+1}\,\triangle^{(1)} + a_{2,n+1}\cdot\triangle^{(2)} + a_{3,n+1}\cdot\triangle^{(3)} + \cdots + a_{n,n+1}\cdot\triangle^{(n)} - a_{n+1\,n+1}\cdot\triangle = 0$

Tome izrazu možemo dati kud i kamo zgodniji oblik. U tu ćemo svrhu preinačiti nešto determinante $\triangle^{(1)}, \triangle^{(2)} \cdots \triangle^{(n)}$.

Ako u
$$\triangle^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{n+1,1} & a_{21} & a_{31} & \cdots a_{n1} \\ a_{n+1,2} & a_{22} & a_{32} & \cdots a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n+1,n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots a_{n,n} \end{vmatrix}$$
stavimo elemente 1. stupca na zadnje mjesto (iza stupca s elementima $a_{n1}, a_{n\cdot}, a_{n}, \cdots a_{nn}$) vrijednost će novoga determinanta biti ista kao u $\triangle^{(1)}$, ako je n—1, a prema tome i $n + 1 = (n - 1) + 2$ parno; a ako je n — 1, a prema tome i n + 1 neparno, bit će vrijednost novoga determinanta jednaka $-\triangle^{(1)}$. Ako označimo vrijednost pomakom nastaloga determinanta sa $\triangle_1^{(1)}$, dakle

$$\triangle_1^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n+1,1} \\ a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n+1,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

imamo relaciju $\triangle^{(1)} = \pm\triangle_1^{(1)}$, gdje gornji predznak vrijedi za n + 1 parno, a donji za n + 1 neparno. Broj n + 1 je broj sviju zadanih jednadžbi sustava (3).

Ako u $\triangle^{(2)}$ pomaknemo 2. stupac (koji se za x_2 sastoji od poznatih članova sust. jednadžbi) na zadnje mjesto, prešao je taj 2. stupac n — 2 stupaca. No ako je n — 1 (ili (n + 1) parno, bit će n — 2 neparno, pa će novi determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & \cdots & a_{n+1,1} \\ a_{12} & a_{32} & \cdots & a_{n+1,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{3n} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

koji ćemo označiti sa $\triangle_1^{(2)}$, imati vrijednost $-\triangle^{(2)}$, dok, ako je n — 1 ili n + 1 neparno, ima vrijednost $+\triangle^{(2)}$. Iz toga slijedi relacija: $\triangle^{(2)} = \mp\triangle_1^{(2)}$. Gornji znak vrijedi za n + 1 parno, a donji za n + 1 neparno. Na jednaki bismo način našli $\triangle^{(3)} = \triangle_1^{(3)}$, $\triangle^{(4)} = \mp\triangle_1^{(4)}$. Odavle lako dođemo do opće formule $\triangle^{(k)} = \pm(-1)^{k-1}\triangle_1^{(k)}$, $k = 1, 2, \cdots\cdot n$.

Možemo se uvjeriti o ispravnosti ove formule, ako stavimo k = 1, 2, 3.... Za k = n bude $\triangle^{(n)} = \pm(-1)^{n-1}\triangle_1^{(n)}$; za n + 1, dakle i n — 1 parno slijedi $\triangle^{(n)} = \triangle_1^{(n)}$, a za n + 1 neparno opet slijedi $\triangle^{(n)} = \triangle_1^{(n)}$; u tom je slučaju stupac s poznatim članovima na zadnjem *n*-tom mjestu pa je svagda $\triangle^{(n)} = \triangle_1^{(n)}$.

Napravimo sad shemu determinanta, kojemu su elementi koeficijenti nepoznanica i poznatih članova prenesenih na lijevu stranu t. j. anuliranih jednadžbi sustava (3):

$$(5)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \cdots\cdots & a_{n1} & (-a_{n+1,1}) \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \cdots\cdots & a_{n2} & (-a_{n+1,2}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} \cdots\cdots & a_{nn} & (-a_{n+1,n}) \\ a_{1,n+1} & a_{2,n+1} & a_{3,n+1} \cdots & a_{n,n+1} & (-a_{n+1,n+1}) \end{vmatrix}$$

Ovaj determinant imade $(n + 1)^2$ elemenata.

Determinanti $\triangle^{(1)}, \triangle^{(2)}, \triangle^{(3)}, \ldots\ldots\ldots \triangle^{(n)}$ i $\triangle$ su subdeterminanti determinanta (5), koji pripadaju elementima

$a_{1,\,n+1}, a_{2,\,n+1}, a_{3,\,n+1}, \ldots\ldots\ldots a_{n,\,n+1}$ i $-a_{n+1,\,n+1}$

Da to pokažemo, uzet ćemo prije, da je $\overline{n + 1}$, a prema tomu i n—1 paran broj. U tom je slučaju $\Delta^{(k)} = +(-1)^{k-1}\triangle_1^{(k)}$. Ako u $\triangle_1^{(k)}$ pomnožimo elemente zadnjega stupca (a to su poznati članovi jednadžbi na desnoj strani) s — 1, pa označimo vrijednost toga determinanta $\Delta_2^{(k)}$, bit će $\Delta_1^{(k)} = -\Delta_2^{(k)}$ i $\Delta^{(k)} = (-1)^k \Delta_2^{(k)}$.

$(-1)^k \Delta_2^{(k)}$ je vrijednost subdeterminanta u determinantu (5), koji pripada elementu $a_{k,\,n+1}$. Shemu ćemo njegovu dobiti, ako precrtamo redak i stupac, u kojemu se nalaze elementi $a_{k,\,n+1}$: predznak mu je prema V. 3. $(-1)^{k+n+1}$, a kako je $n + 1$ paran broj, zavisan je predznak samo o *k*, te je određen s $(-1)^k$. Ako je *k* neparno onda je i $k + n + 1$ neparno, a ako je parno, bit će i $k + n + 1$ parno.

Dakle $(-1)^k \Delta_2^{(k)}$ je zbilja subdeterminant elementa $a_{k,\,n+1}$, pa kako je to jednako $\Delta^{(k)}$, vrijedi to i za $\Delta^{(k)}$.

Ako je $\overline{n+1}$ neparan broj bit će $\Delta^{(k)} = -(-1)^{k-1} \Delta_1^{(k)} = -(-1)^k \Delta_2^{(k)}$. Ovo je opet subdeterminant u (5) elementa $a_{k,\,n+1}$ kojemu je predznak određen sa $(-1)^{k+n+1}$, no kako je $(-1)^{k+n+1} = (-1)^k (-1)^{n+1} = -(-1)^k$, (jer $(-1)^{n+1} = -1$), i u ovom je slučaju $\Delta^{(k)}$ subdeterminant elementa $a_{k,\,n+1}$.

$\triangle$ je subdeterminant elementa $-a_{n+1,\,n+1}$, a predznak mu je određen sa $(-1)^{n+1+n+1} = +1$ bilo $\overline{n+1}$ parno ili neparno.

S toga je lijeva strana jednadžbe (4) vrijednost determinanta (5). Ovaj mora biti jednak nuli, ako vrijednosti nepoznanica $x_1 \cdots x_n$ iz *n* prvih jednadžbi sustava (3) određene moraju da zadovoljavaju zadnjoj jednadžbi.

Mogli bismo te jednadžbe (3) poređati i drugačije, pa bismo opet došli do istoga uvjeta, uz koji vrijednosti *n* nepoznanica određenih iz *n* jednadžbi zadovoljavaju sustavu od $n+1$ jednadžbi sa *n* nepoznanica.

U sustavu $\overline{n+1}$ *jednadžbi s n nepoznanica zadovoljavat će istih n vrijednosti nepoznanica svima jednadžbama u isti mah, ako bude determinant sastavljen od koeficijenata nepoznanica i poznatih članova anuliranih jednadžbi jednak nuli. Shemu ćemo toga determinanta dobiti izostavivši nepoznanice, znakove zbrojidbe i znakove jednakosti s nulama.*

Determinant (4), koji možemo prema gornjem pisati u obliku

$$a_{1,\,n+1} A_{1,\,n+1} + a_{2,\,n+1} A_{2,\,n+1} + \cdots\cdots\cdots + a_{n,\,n+1} A_{n,\,n+1} - a_{n+1,\,n+1} A_{n+1,\,n+1} = 0.$$

rezultat je *eliminacije* sviju *n* nepoznanica iz $\overline{n + 1}$ jednadžbi.

Primjeri 1. Naći ćemo direktno uvjet, da sustavu jednadžbi

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

zadovoljavaju iste vrijednosti za *x* i *y*.

Iz prvih dviju jednadžbi slijedi

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

(Vidi I. 3., V. 2., VI. 3.)

Ako te vrijednosti moraju zadovoljavati i trećoj jednadžbi, onda mora postojati relacija:

$$\frac{a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = 0$$

Ako nazivnik nije jednak nuli, što ćemo ovdje predpostaviti, mora brojnik biti jednak nuli. No brojnik je vrijednost determinanta sheme

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ pa je uvjet ispunjen,}$$

ako bude taj determinant jednak nuli.

Ako one tri jednadžbe predočuju pravce, onda je tim izražen uvjet, da ta tri pravca prolaze istom točkom, jer iste koordinate x, y zadovoljavaju svima trim jednadžbama.

Ako su zadane jednadžbe triju točaka:

$$\begin{aligned} a_1 u + b_1 v + c_1 &= 0 \\ a_2 u + b_2 v + c_2 &= 0 \\ a_3 u + b_3 v + c_3 &= 0, \end{aligned}$$

onda gornji uvjet izražava, da te tri točke leže na jednom istom pravcu, jer koordinate istoga pravca u, v zadovoljavaju svima trim jednadžbama.

2. Kolik mora biti poznati član u 3. jednadžbi sustava, koji predočuje tri pravca:

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 6 &= 0 \\ x - 3y + 7 &= 0 \\ 3x + y + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

ako ovi pravci treba da prolaze jednom istom točkom?

Uvjet je tome, da bude

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ako taj determinant rastavimo po elementima 3. stupca, dobit ćemo jednadžbu $-60 + 70 - 10c_3 = 0$, odakle $c_3 = 1$.

3. Treba naći uvjet, kad 4 točke (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) leže na istoj kružnici.

Jednadžba kružnice neka ima oblik $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. Koordinate zadanih točaka moraju zadovoljavati ovoj jednadžbi pa moraju postojati ove 4 jednadžbe:

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + c &= 0 \\ x_2^2 + y_2^2 + 2ax_2 + 2by_2 + c &= 0 \\ x_3^2 + y_3^2 + 2ax_3 + 2by_3 + c &= 0 \\ x_4^2 + y_4^3 + 2ax_4 + 2by_4 + c &= 0 \end{aligned}$$

Iste će vrijednosti za a, b, c samo onda zadovoljavati ovim jednadžbama, ako bude

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ako uzmemo sad, da su prve tri točke zadane, to će svaka četvrta točka, koje koordinate zadovoljavaju zadnjoj relaciji, biti na kružnici, koja prolazi onim trima točkama, pa ako su koordinate te četvrte (promjenljive) točke $(x\ y)$, bit će jednadžba ove kružnice.

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x^2 + y^2 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Možemo zadnji redak staviti na prvo mjesto, no da ostane ista vrijednost treba staviti pred determinant znak minus. No kako je negativni broj jednak nuli, ako je njegova apsolutna veličina jednaka nuli, imat će jednadžba kružnice, koja prolazi trima točkama danim, ovaj zgodniji oblik:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Zadaci za vježbu.

1. Nađi uvjet, kada 6 točaka, zadanih koordinatama leži na sjekotini stošca s jednadžbom:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0?$$

Rješenje
$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & x_6y_6 & y_6^2 & x_6 & y_6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2. Nađi u determinantnom obliku jednadžbu pravca, koji prolazi dvjema zadanim točkama ili dualno, jednadžbu točke, u kojoj se sijeku dva pravca.

Vidi 1. i 3. primjer u ovom poglavlju.

3. Dokaži, da jednadžbe

$$\begin{aligned} ax + y + z &= a \\ ax + ay + z &= 1 \\ x + ay + az &= 1 \\ x + y + az &= a \end{aligned}$$

mogu postojati u isti mah. Nađi rješenja, koja im zadovoljavaju.

Rješenje: $x = z = -y = 1.$*

4. Koliko treba da bude *b*, da iste vrijednosti od *x*, *y* zadovoljavaju jednadžbama:

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 6 &= 0 \\ 3x + by - 8 &= 0 \\ x + y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje: $b = 5.$

5. Dokaži, da je

$$\triangle = \begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} = -16(s-a)\cdot(s-b)$$

$(s-c)(s-d)$, gdje je $2s = a + b + c + d.$**

* Mathesis 1902. pg. 262.

** Naveo dr. K. Zahradnik u svojim predavanjima.

Naputak. Pribroji elementima 1. stupca elemente 2. 3. i 4. stupca, izluči tada zaj. faktor 2 (s—a) pa će preostati kao drugi faktor determinant 4. stupnja, u kojemu odbij od el. 1. retka elemente 3. i 4. retka, a pribroji elemente 2. retka pa izlazi 2 (s—b) kao zaj. faktor; dakle dobivamo $\triangle = 4(s-a)(s-b)\triangle'$ Ako u $\triangle'$ odbijemo elemente 3. retka od elemenata 2. retka, a elemente 4. retka od elemenata 3. r., dobit ćemo shemu, koja se reducira na jedan determinant 3. stupnja. Ako u ovom det. pribrojimo elemente 1. stupca elementima 2. stupca i 3. stupca, dobit ćemo determinant, koji ima vrijednost $-4(s-c)(s-d)$.

Izraz $(s-a).(s-b).(s-c).(s-d)$ je kvadrat površine tetivnoga četverokuta sa stranicama a, b, c, d.

Bilješka. Već je (1693.) Leibnitz došao do determinanata 2. i 3. stupnja promatrajući rješenja linearnih jednadžbi s 2 i 3 nepoznanice. Nezavisno je god. 1750. Cramer našao opće rješenje sustava linearnih jednadžbi u obliku determinantnom. Dalje su to primijenili u mnogim slučajevima analize Bézout, Vandermonde, Lagrange, Gauss i dr. Sistematičku je teoriju podao Cauchy (1812.), kojega drže formalnim osnivačem teorije determinanata. Dalje su ovu teoriju razvili Jacobi, Cayley, Hermite, Sylvester, Studnička i dr.

GDJE JE ŠTO?